فصلنامه علمی ـ پژوهشی
سال دهم، شماره دوم، تابستان ۱۴۰۲
تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۵
تاریخ تأیید مقاله:۱۴۰۰/۱۲/۱۶

بررسی اهمیت فلسفی برهان قطری کانتور

سید سعید میراحمدی[۱]، رحمان احترامی[۲]

چکیده

اکثر ریاضی‌دانان معاصر، نظریه مجموعه‌های فوقِ‌متناهی کانتور (Cantor’s transfinite set theory) را پذیرفته‌اند. در این نظریه، برهان قُطری کانتور از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و دارای کاربردهای بسیار جالب و عجیبی است. جهت شناخت ماهیت برهان قطری و همچنین ارزیابی میزان ارزش و اعتبار این برهان، بهتر است برهان قطری در مسأله ای به‌کار گرفته شود که شامل مفاهیم و مقدماتی کمتر و بدیهی‌تر باشد. ازاین‌رو در این مقاله، برهان قطری را جهت اثبات یک قضیه فلسفی به‌کار گرفته‌ایم. فلسفی بودن مسأله مورد مطالعه موجب شده است تا برهان قطری ارائه‌شده، تنها بر مفاهیمی مانند "شیء"، "ترتیب" و "نامتناهی بالفعل" استوار باشد و نیازی به استفاده از مفاهیم پیچیده‌تر ریاضیاتیِ موجود در برهان قطری ارائه‌شده توسط کانتور وجود نداشته باشد. روشن می‌شود که ارزش و اهمیت فلسفی برهان قُطری ارائه‌شده، کمتر از براهینی مانند تطبیق، طرف و وسط، سُلّمی، مُسامته و براهینی از این دست نیست.

واژگان کلیدی: مسأله فلسفی، برهان قطری کانتور، نامتناهی شیء بالفعل، مجموعه‌های ناشمارا.

۱. دانشجوی دکتری، گروه فلسفه فیزیک، دانشگاه باقرالعلوم ﷷ، قم، ایران mirahmadi@bou.ac.ir
۲. دکتری تخصصی فلسفه و کلام اسلامی از مؤسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران، تهران sefehteram@gmail.com

نحوه استناد: میراحمدی، سید سعید؛ احترامی، رحمان (۱۴۰۲).
«بررسی اهمیت فلسفی برهان قطری کانتور»، *حکمت اسلامی*، ۱۰ (۲)، ص۱۱-۲۳.

مقدمه

در سال ۱۸۹۱میلادی، کانتور[1] برهانی ارائه کرد که اکنون به نام «برهان قُطری کانتور»[2] مشهور است (Cantor, 1891). کانتور برهان قطری خود را برای نیل به دو هدف به‌کار گرفت؛ یکی اینکه برهان روشن‌تری نسبت به برهان قبلی خود در اثبات ناشمارا بودن مجموعه اعداد حقیقی ارائه کند و دیگر اینکه اثبات کند به‌ازای هر مجموعه‌ای دلخواه از اعداد، مجموعه‌ای بزرگ‌تر از آن قابل ارائه است. برای آشنایی با نحوه به‌کارگیری برهان قطری کانتور جهت اثبات عدم امکان وجود تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد طبیعی ببینید (لین، لین، ۱۳۸۸، ص۱۲۸).

ازآنجاکه روش به‌کار گرفته شده در برهان قطری، یک روش کلی است، از این برهان در زمینه‌های گوناگون از جمله: اثبات قضیه اول ناتمامیت گودل و قضیه تعریف‌ناپذیری تارسکی استفاده شده است (میراحمدی، ۱۳۹۶، ص۹۳-۱۰۲؛ Simmons, 1991; Sheppard, 2014, p. 73). بررسی جنبه‌های فلسفی ارتباط بین برهان قطری و پارادوکس دروغ‌گو را نیز در کار سیمونز می‌توان یافت (Simmons, 1990).

نظریه کانتور بعد از حمایت هیلبرت سرانجام به‌طور گسترده توسط ریاضی‌دانان پذیرفته شد. با این حال، بروئر و پیروان مکتب شهودگراییِ او با نظریه فوقِ‌متناهی کانتور مخالفت کرده‌اند. ویتگنشتاین نیز با نحوه به‌کارگیری مفهوم «نامتناهی» توسط کانتور موافق نبوده و نسبت به تفسیر برهان قطری وی اشکالاتی را مطرح کرده است (Therrien, 2012; Zhuang[3]; Dawson, 2015; Gitsoulis, 2018).

برهان قطری ارائه‌شده توسط کانتور و همچنین بقیه براهین قطری ارائه‌شده در حوزه ریاضیات، بر مفاهیم و گزاره‌هایی مانند «مجموعه نامتناهی بالفعل از همه اعداد طبیعی»، «مجموعه‌ای شامل

1. Georg Cantor (1845-1918).
2. Cantor’s diagonal argument
۳. دسترسی: https://philarchive.org/archive/ZHUWAO .

همه زیرمجموعه‌های مجموعه اعداد طبیعـی»، «مجموعـه اعـداد حقیقـی»، «هـر عـدد حقیقـی را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای نامتناهی بالفعـل از ارقـام به‌صـورت یکتـا نمـایش داد» و غیـره، اسـتوار هستند.[1] این درحالی است که برای شناخت ماهیت برهان قطری و همچنین ارزیابی میـزان ارزش و اعتبار این برهان بهتر است برهان قطری در مسأله‌ای به‌کار گرفته شود که شـامل مفـاهیم و مقـدماتی کمتر و بدیهی‌تر باشد. ازاین‌رو، در این مقاله برهـان قطـری را در اثبـات یـک قضـیه فلسـفی بـه‌کار خواهیم گرفت. فلسفی بودن مسأله مورد مطالعه موجب می‌شود تا برهـان قطـری ارائه‌شـده تنهـا بـر مفاهیمی مانند «شیء»، «ترتیب» و «نامتناهی بالفعل» استوار باشد و نیازی به اسـتفاده از مفـاهیم و گزاره‌های پیچیده‌ترِ ریاضیاتیِ موجود در برهان قطری ارائه‌شده توسط کانتور کـه بـه آنهـا اشـاره شـد وجود نداشته باشد.

با توجه به اینکه برهان قطری کمتر در حوزه هستی‌شناسی و فلسفه به‌کار گرفتـه شـده اسـت، بـه نظر می‌رسد که برخی از ظرفیت‌های فلسفی این برهان آشکار نشده و شاید به همین دلیل اسـت کـه برخی از فلاسفه تمایلی به بررسی صحت و اعتبار این برهان و نتایج مترتب بر آن نشان نداده‌انـد. در قسمت ۳ روشن خواهد شد که ارزش و اهمیت فلسفی برهان قطری ارائه‌شده جهـت اثبـات امتنـاع «نامتناهی بالفعل» کمتر از براهینی مانند تطبیق، طرف و وسـط، سُـلّمی، مُسـامته و براهینـی از ایـن دست نیست.

با توجه به اینکه استفاده از برهان قطری کانتور فقط برای مجموعه‌های نامتناهی بالفعـل صـحیح و نتیجه‌بخش است (میراحمدی، ۱۳۹۶، ص۸۸-۹۳)، ابتدا بـه نظـر برخـی از فلاسـفه و ریاضـی‌دانان درباره امکان یا امتناع نامتناهی بالفعل اشاره می‌کنیم.

۱. نامتناهی شیء بالفعل

تعداد ستارگان موجود در عالم چندتاست؟ آیا ممکن است که آنها از هر تعداد متنـاهی (مثـل ۱۰۰، ۱۰۰۰ و بقیه اعداد متناهی) بیشتر باشند؟

از نظر ارسطو، وجود نامتناهی شیء بالفعل که مجتمع در وجـود باشـند محـال اسـت (ارسـطو، ۱۳۶۳، ص ۱۲۰-۱۲۴؛ همو، ۱۳۷۸، ص۱۲۳-۱۲۴). ابن سینا در این باره بین موجـودات مـادی و مجـرد تفاوت قائل شده است. وی وجود نامتناهی بالفعل از موجودات مادّی که مجتمع در وجود باشـند را غیر ممکن دانسته است (ابن سینا، ۱۴۰۴ق، ج۱، ص۲۱۲). امـا درعین‌حـال، بـه وجـود نامتنـاهی بالفعل از موجودات مجرد معتقد است (همو، ۱۳۷۹، ص۲۴۶). ملاصدرا (صدرالدین شـیرازی، ۱۴۱۰ق،

---

۱. منظور این نیست که هر کدام از براهین قطری ارائه شده در حوزه ریاضیات، الزاماً بر همه مفاهیم و گزاره‌های مذکور استوارند.

ج۲، ص۱۴۷) و اکثر فیلسوفان مسلمان به تبع ابن سینا، وجود مجموعه‌ای نامتناهی از اشیاء را در صورتی محال می‌دانند که سه شرط «فعلیت همه اعضاء، اجتماع در وجود و ترتّب اعضاء نسبت به یکدیگر» محقّق باشد. ایشان با وضعِ شرطِ «اجتماع در وجود»، سلسله‌ای نامتناهی از حوادث گذشته را از دایره نامتناهی محال خارج کرده و در نتیجه، ازلی بودنِ حرکت و زمان را ممکن می‌دانند.[1] غالباً در مبحث «نامتناهی» از دو نوع ترتّب نام برده می‌شود؛ ترتّب وضعی (ترتیب بین اجسام) و ترتّب طبعی (ترتّب میان علت و معلول). فلاسفه به کمک شرط ترتّب، مجموعه‌هایی مانند مجموعه نامتناهی بالفعل از موجودات مجرّد را از دایره نامتناهی محال خارج می‌کنند (قطب‌الدین شیرازی، ۱۳۸۳، ص۱۷۷-۱۷۸؛ ابن سینا، ۱۳۷۹، ص۲۴۵-۲۴۶).

میرداماد با پذیرش شروط فلاسفه برای جریان براهین بطلان تسلسل، اجتماع سلسله حوادث در ظرف دهر را برای جریان این براهین کافی دانسته و به همین دلیل، نامتناهی بودن سلسله حوادث گذشته را نفی کرده است (ر.ک به: میرداماد، ۱۳۶۷).

علامه طباطبایی امتناع سلسله نامتناهی بالفعل را مشروط به وجود رابطه علّی بین اجزاء دانسته‌اند. بیان وی چنین است:

> اگر اجزاء به‌صورت بالفعل و مجتمع در وجود باشند اما ترتّبی میان آنها نباشد، محالی لازم نمی‌آید؛ مانند تعداد نامتناهی از موجوداتی که هیچ‌گونه رابطه علّیت و معلولیت میان آنها برقرار نیست (طباطبایی، ۱۴۲۴ق، ص۲۲۰).

جهت استحاله نامتناهی، متکلّمین تنها شرط «فعلیت اعضاء» را پذیرفته‌اند. به نظر ایشان، وجود مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اشیاء محال است، حتی اگر اعضاء، مجتمع در وجود نبوده و هیچ ترتّبی بین آنها وجود نداشته باشد.

علامه جوادی آملی در ذیلِ عنوانِ «دلیل استحاله نامتناهی شیء مادی»، پذیرش نامتناهی شیء مادی و قبول امتناع تداخل اجسام را مستلزم نامتناهی بودن مکان دانسته که به عقیده ایشان، دلیل امتناع آن تام است (جوادی آملی، ۱۳۹۵، ج۱۶، ص۳۵۳). به عقیده ایشان، نامتناهی شیء، نیازمند به وجود نامتناهی علت است و این امر منجر به تسلسل در سلسله علل می‌شود که امری محال است. در نتیجه، وجود نامتناهی شیء، چه مادی و چه مجرد، محال است (جوادی آملی، ۱۳۹۵، ج۱۶، ص۳۵۳-۳۵۴).

علامه حسن‌زاده آملی نه‌تنها وجود نامتناهی بالفعل شیء در عالم را محال نمی‌داند، بلکه با

---

۱ برای بررسی سازگاری «امتناع نامتناهی بالفعل» با «امکان نامتناهی بودن زمان و حوادث گذشته»، ببینید (میراحمدی، پارسانیا، ۱۴۰۱)

تمسک به غیر متناهی بودن حق‌تعالی وجود نامتناهی شیء در عالم جسمانی را محقق و ضروری می‌داند (حسن‌زاده آملی، ۱۳۶۵، ص۵۱۰).

علامه مصباح یزدی براهین اقامه‌شده بر امتناع نامتناهی بالفعل را دارای یک اشکال واحد می‌دانند. به عقیده ایشان، احکام ریاضی مختص به مقادیر متناهی است و تعمیم این احکام به حوزه نامتناهی صحیح نیست (مصباح یزدی، ۱۳۹۳، ص۲۷۷). ایشان این مطلب که صدق «عدد» تنها بر امور محدود و متناهی جایز باشد و امور نامتناهی به‌خاطر نامتناهی بودنشان معروض عدد قرار نگیرند را ممکن دانسته و این را تأییدی بر این مطلب می‌دانند که «کم»، امری اعتباری است (مصباح یزدی، ۱۳۹۳، ص۱۹۰).

موضوع «نامتناهی» در فلسفه کانت[1] از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ چراکه سه تا از چهار حکم جدلی الطرفینی[2] که او در کتاب‌های نقد عقل محض و تمهیدات مطرح کرده و مورد بررسی قرار داده است، مستقیماً مربوط به مسأله نامتناهی است (ر.ک به: کانت، ۱۳۶۲، ص۳۹۶-۴۱۵؛ ر.ک به: همو، ۱۳۶۷، ص۱۸۶-۱۹۸). تعارضات مربوط به قضایای جدلی الطرفین در بیدار کردن کانت از خواب جزمی و عزیمت وی به جانب نقد عقل محض نقش به‌سزایی داشته است. کانت در سال ۱۷۹۸میلادی در نامه‌ای به کریستین گاروِه می‌نویسد: «... همین تعارضات بود که مرا از خواب جزمی بیدار کرد و به جانب نقادی عقلمان سوق داد تا ننگ تناقضی را که عقل به ظاهر با خودش دارد، پاک کنم» (هارتناک، ۱۳۷۶، ص۱۴۶). وی پس از بیان قضایای جدلی الطرفین از خوانندگانِ نقد عقل محض می‌خواهد که این تعارضات را به‌طور ویژه مورد توجه قرار دهند؛ «زیرا چنین به نظر می‌رسد که خود طبیعت آن را برای آن ترتیب داده است تا جلوی بلندپروازی‌های عقل را در ادعاهای گستاخانه‌اش بگیرد و آن را به آزمودن خود وادار سازد. من خود مسئولیت صحت هر دلیلی را که در اثبات «وضع»[3] و همچنین «وضع مقابل»[4] آورده‌ام به عهده می‌گیرم، و لذا متعهد می‌شوم حتمی بودن این تعارضِ اجتناب‌ناپذیرِ عقل را اثبات کنم. اگر این نمود عجیب خواننده را برانگیزد تا برای آزمودن مفروضاتی که شالوده آن است به عقب باز گردد، وی خود را ناچار خواهد دید که همراه با من، در مبانی اولیه تمامی شناسایی حاصل از عقل محض، عمیقاً به تفحص بپردازد» (کانت، ۱۳۶۷، ص۱۸۹).

برخلاف نظر کانت که صحت براهین هر دو طرفِ محل نزاع در اثبات «وضع» و «وضع

1. Immanuel Kant (1724-1804).
2. Antinomy.
3. Thesis.
4. Antithesis.

مقابل» را تضمین می‌کرد، در پی تلاش‌های کانتور پذیرفته شد که «نامتناهی بالفعل» از نظر منطقی ابطال‌پذیر نیست و براهین اقامه‌شده ناتمام هستند، مگر با تصدیق به «عدم وجود تمایز بین احکام ریاضیاتِ متناهی و نامتناهی» و قبول «تسری احکام ریاضیاتِ متناهی به نامتناهی» که این گزاره‌ها نیز نه بدیهی هستند و نه اثبات‌پذیر (میراحمدی، پارسانیا، احترامی، ۱۴۰۱). کانتور با تعریف تساوی به «وجود تناظری یک‌به‌یک بین اعضای مجموعه‌ها»، ریاضیاتِ فوقِ متناهی[1] را پایه‌گذاری کرد. با روشن شدن استقلال «نامتناهی بالفعل» از ریاضیات متناهی (Forster, 2003, p. 209; Hrbacek, Jech, 1999, p. 71; Abian, LaMacchia, 1978; Mendelson, 1956)، سرانجام در نظریه اصل‌موضوعی مجموعه‌ها[2] اصل‌موضوع نامتناهی[3] به‌عنوان یکی از اصول موضوعه پذیرفته شد.[4] تاریخچه «نامتناهی»، نظریه مجموعه‌های نامتناهی کانتور، برهان قطری وی و نتایج حاصل از آن در برخی منابع به تفصیل آمده است (ر.ک به: میراحمدی، ۱۳۹۶).

۲. به‌کارگیری برهان قطری کانتور در اثبات یک قضیه فلسفی

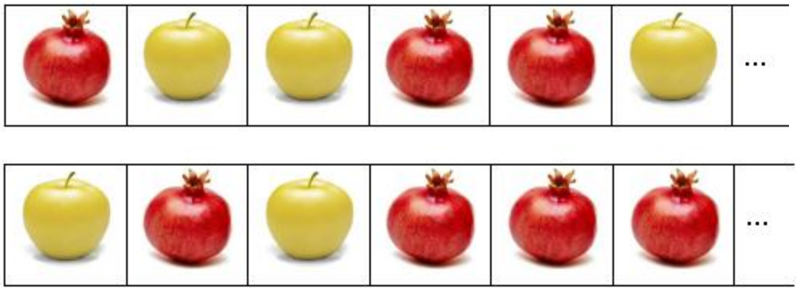
با فرض پذیرش «نامتناهی بالفعل»، روشن است که بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد زوج، تناظری یک‌به‌یک برقرار است[5] و یا به‌عبارت دیگر، این دو مجموعه با یکدیگر برابرند. بنابراین چنین به نظر می‌رسد که می‌بایست همه مجموعه‌های نامتناهی بالفعل با یکدیگر مساوی باشند. یعنی اینکه وجود تناظری یک‌به‌یک بین آنها غیرممکن نباشد. اما آیا این ادعا صحیح است؟ آیا می‌توان دو مجموعه نامتناهی بالفعل معرفی کرد که وجود تناظری یک‌به‌یک بین آنها غیر ممکن باشد و یا به‌عبارت دیگر، یکی از آنها از دیگری بزرگتر باشد؟ آنچه در ادامه می‌آید، درواقع تلاشی است در جهت پاسخ به این پرسش.

فرض می‌کنیم جعبه‌ای داریم که بالفعل دارای بی‌نهایت قسمت مجزاست و می‌خواهیم درون آن انار یا سیب قرار دهیم به‌طوری که در هر قسمت فقط یک انار یا یک سیب (نه هر دو) قرار بگیرد (شکل۱، دو چینشِ مختلف را نشان می‌دهد).

1. Transfinite mathematics
2. Axiomatic set theory
3. Axiom of infinity

۴. با توجه به استقلال «نامتناهی بالفعل» از ریاضیات متناهی می‌توان به جای اصل‌موضوع نامتناهی، نقیض آن را به‌عنوان اصل موضوع پذیرفت. سازگاری این دستگاهِ جدید نیز مانند سازگاری دستگاه اصل‌موضوعیِ رایج است.

۵ یعنی این که می‌توان اعضای این دو مجموعه را روبروی یکدیگر قرار داد به طوری که هر عضو از یک مجموعه، فقط در مقابل یک عضو از مجموعه دیگر قرار گرفته باشد.

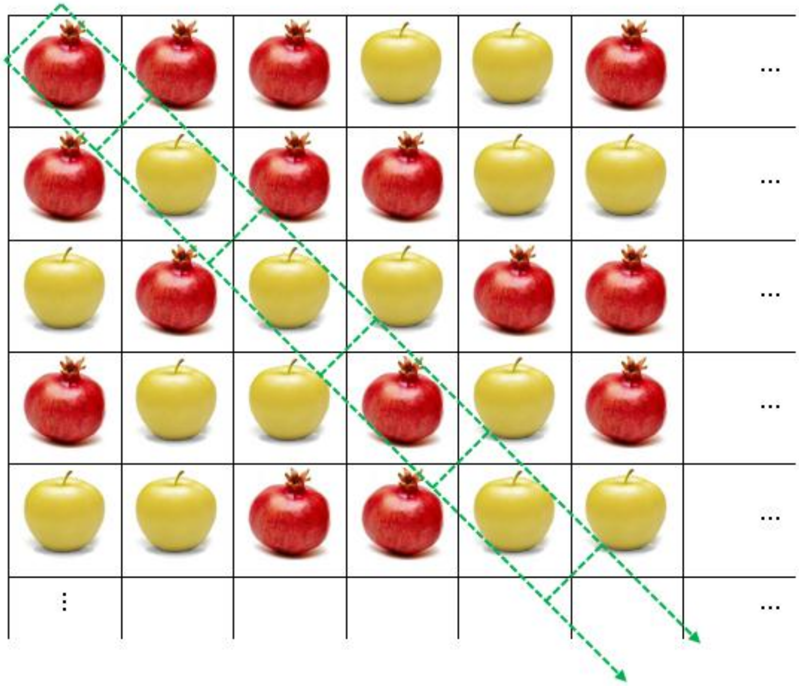


شکل ۱. دو چینش مختلف (هر جعبه دارای بی‌نهایت قسمت مجزا می‌باشد)

حال سؤال این است که چنین چینش‌هایی را به چند طریق مختلف می‌توان انجام داد؟ به‌طور مثال، یک راه این است که درون همه قسمت‌ها انار قرار دهیم. راه دیگر این است که درون همه قسمت‌ها سیب قرار دهیم. راه سوم این است که درون قسمت اول، انار و درون بقیه قسمت‌ها سیب قرار دهیم و به همین ترتیب. سؤال این است که چند راهِ مختلف برای پُر کردن این جعبه وجود دارد؟ به نظر می‌رسد که تعداد راه‌های مختلف، نامتناهی است. حال از خداوندِ قادرِ متعال درخواست می‌کنیم که همه جعبه‌های با چینش‌های مختلف را بیافریند. بنابراین بی‌نهایت جعبه خواهیم داشت. به نظر می‌رسد هر گونه چینشی از انار و سیب را که تصوّر کنیم، جعبه‌ای با آن چینش وجود خواهد داشت. آیا این کار ممکن است؟ آیا آفرینش و قرار دادنِ تمام جعبه‌هایی که هر کدام دارای چینش خاصی است به‌صورت ستونی در زیر یکدیگر، به‌طوری که هیچ چینشی از قلم نیافتاده باشد، ممکن است؟ به نظر می‌رسد که محال نباشد. اما قضیه زیر چیز دیگری را نشان می‌دهد.

قضیه: آفرینش و قرار دادنِ همه جعبه‌های با چینش‌های مختلف به‌صورت ستونی در زیر یکدیگر ممکن نیست.

برهان (برهان خلف)**:** فرض می‌کنیم که آفرینش و قرار دادن همه جعبه‌های با چینش‌های مختلف به‌صورت ستونی در زیر یکدیگر ممکن است (فرض خلف). بنابراین اولین جعبه در سطر ۱ قرار دارد. جعبه دوم در سطر ۲ و جعبه سوم در سطر ۳ و به همین ترتیب (شکل۲). به‌علاوه فرض می‌کنیم که هیچ دو جعبه‌ای دارای چینش‌هایی یکسان نیستند.



شکل ۲. مجموعه همه جعبه‌های با چینش‌های مختلف

حال چینش انار و سیب روی قطر اصلی در شکل ۲ را در نظر گرفته (خط‌چینِ سبز رنگ) و جعبه‌ای که چینش آن دقیقاً مانند چینش انار و سیب روی قطر اصلی در شکل ۲ (خط‌چینِ سبز رنگ) باشد را جعبه قطری می‌نامیم. روشن است که جعبه قطری (یعنی جعبه‌ای که چینش آن با چینش نشان داده شده، به‌وسیله خط‌چینِ سبزرنگ، یکسان است) می‌بایست در یکی از سطرهای شکل ۲ قرار گرفته باشد؛ چراکه فرض بر این بود که همه جعبه‌های با چینش‌های مختلف، آفریده شده و در زیر یکدیگر قرار گرفته‌اند.

حال، جعبه «مطلوب» را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

جعبه «مطلوب»: جعبه‌ای دارای بی‌نهایت قسمت مجزاست؛ به‌طوری‌که محتویات هر قسمت آن با محتویات قسمت متناظر از جعبه قطری متفاوت است. به‌طور مثال، اگر در خانه اول از جعبه قطری سیب وجود داشته باشد، آنگاه در خانه اول از جعبه «مطلوب» انار قرار دارد. به همین ترتیب، مثلاً اگر در خانه هزارم جعبه قطری انار باشد و آنگاه در خانه متناظر آن (یعنی خانه هزارم) از جعبه «مطلوب»، سیب قرار دارد.

طبق تعریف، روشن است که جعبه مطلوب، یک جعبه نامتناهی است. در ادامه نشان می‌دهیم

که این جعبه در مجموعه همه جعبه‌های آفریده شده قرار ندارد.[۱]

می‌دانیم که جعبه مطلوب، اوّلین جعبه (یعنی جعبه‌ی قرارگرفته در سطر ۱) از مجموعه‌ی همه جعبه‌های آفریده شده (شکل۲) نمی‌تواند باشد؛ چون که اولین خانه‌ی آنها با یکدیگر متفاوت است. جعبه مطلوب با دومین جعبه نیز تفاوت دارد؛ چراکه در دومین خانه باهم فرق دارند و به همین ترتیب، روشن است که جعبه مطلوب در سطر هزارم نیز قرار ندارد؛ چراکه با جعبه‌ای که در این سطر (یعنی سطر هزارم) قرار دارد، در خانه هزارم با یکدیگر متفاوتند. بنابراین در حالت کلی چنین است که جعبه مطلوب با همه جعبه‌ها تفاوت دارد و این یعنی تناقض؛ چراکه فرض بر این بود که همه جعبه‌های با چینش‌های مختلف، آفریده شده‌اند و هر جعبه‌ای با هر چینشی که شما تصوّر کنید به‌هرحال می‌بایست در سطری مشخص قرار داشته باشد. این تناقض نشان می‌دهد که فرضِ خُلف باطل است و حکم ثابت.

با فرضِ پذیرش اینکه امکانِ قرارگیریِ بی‌نهایت جعبه به‌صورت ستونی در زیر یکدیگر وجود دارد، قضیه فوق نشان می‌دهد که این بی‌نهایت جایگاه، برای چینش همه اعضای مجموعه «همه چینش‌های مختلف» کافی نیست. به‌عبارت دیگر، دو مجموعه نامتناهی بالفعل (مانندِ «مجموعه شامل همه جایگاه‌های ستونی» و «مجموعه شامل همه چینش‌های مختلف») داریم که یکی از دیگری بزرگ‌تر است. به‌عبارت دیگر، قضیه فوق نشان می‌دهد که پذیرشِ «نامتناهی بالفعل» منجر به پذیرش این گزاره می‌شود که «وجود تناظری یک‌به‌یک بین برخی از مجموعه‌های نامتناهی بالفعل غیر ممکن است». با استناد به محال بودنِ گزاره اخیر می‌توان امتناع نامتناهی بالفعل را نتیجه گرفت. بنابراین برهان قطری در ردیف برهان تطبیق و براهینی از این دست قرار می‌گیرد. همه این براهین جهت اثبات امتناع «نامتناهی بالفعل» با استفاده از روش برهان خُلف نشان می‌دهند که پذیرش «نامتناهی بالفعل» منجر به نتیجه‌ای می‌شود که قابل قبول نیست.

نتیجه‌گیری

بعد از به‌کارگیری برهان قُطری توسط کانتور در سال ۱۸۹۱میلادی، در حوزه ریاضیات و در زمینه مربوط به اعداد و ارقام، بحث‌های بسیاری در بین ریاضی‌دانان درباره اعتبار این برهان درگرفت.

۱. به‌راحتی می‌توان نشان داد که علاوه بر جعبه مطلوب بی‌نهایت، چینش مختلف دیگر نیز قابل تصورند که جعبه‌هایی با آن چینش‌ها، در مجموعه همه جعبه‌های آفریده شده (شکل ۲) وجود ندارند. درواقع تعداد چینش‌های آفریده نشده آن قدر زیاد است که هر گونه تلاش مجدد برای آفرینش و قرار دادن آنها به شکل ستونی در زیر یکدیگر، غیر ممکن است. در واقع مفاد برهانِ ارائه‌شده این است که مجموعه‌ای شامل همه چینش‌های مختلف، مجموعه‌ای ناشماراست. یعنی اینکه وجود تناظری یک‌به‌یک بین این مجموعه و مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از همه اعداد طبیعی (در صورت امکان چنین مجموعه‌ای) غیر ممکن است.

به‌تدریج از این برهان در اثبات برخی از قضـایای منطقـی نیـز اسـتفاده شـد کـه بـالطبع مشـاجرات منطقیِ بسیاری را نیز وارد صحنه کرد. جهت شناخت ماهیت برهان قُطری و همچنین ارزیابی میـزان ارزش و اعتبار این برهان، بهتر است برهان قُطری در مسأله‌ای به‌کار گرفته شود کـه شـامل مفـاهیم و مقدماتی کمتر و بدیهی‌تر باشد. ازاین‌رو در این مقاله، برهان قُطری را برای اثبات یک قضـیه فلسـفی به‌کار گرفتیم. فلسفی بودن مسأله مورد مطالعه موجب می‌شود تـا برهـان قُطـری ارائه‌شـده، تنهـا بـر مفاهیمی مانند «شیء»، «ترتیب» و «نامتناهی بالفعل» استوار باشد و نیازی به اسـتفاده از مفـاهیم و گزاره‌های پیچیده‌تر ریاضیاتیِ به‌کار گرفته‌شده توسط کـانتور وجـود نداشـته باشـد. حتـی نیـازی بـه استفاده صریح از مفهوم «مجموعه نامتناهی بالفعل از اعداد طبیعی» نیز در برهـان قطـری ارائه‌شـده وجود ندارد. با توجه به اینکه در حوزه هستی‌شناسی و فلسفه، برهان قطری کمتـر بـه‌کار گرفتـه شـده است، به نظر می‌رسد برخی ظرفیت‌های فلسفی این برهان آشکار نشده و شاید به همین دلیل اسـت که برخی از فلاسفه تمایلی به بررسی صحت و اعتبار این برهان و نتایج مترتب بر آن نشان نداده‌انـد. توضیحات ارائه‌شده در انتهای قسمت ۳ نشان می‌دهـد کـه ارزش و اهمیـت فلسـفی برهـان قطـری ارائه‌شده جهت اثبات امتناع «نامتناهی بالفعـل»، کمتـر از براهینـیماننـد تطبیـق، طـرف و وسـط، سُلّمی، مُسامته و براهینی از این دست نیسـت. همـه ایـن بـراهین جهـت اثبـات امتنـاع «نامتنـاهی بالفعل» با استفاده از روش برهان خُلف نشان می‌دهنـد کـه پـذیرش «نامتنـاهی بالفعـل» منجـر بـه نتیجه‌ای می‌شود که قابل قبول نیست.

کتاب‌نامه

۱. ابن‌سینا، حسین‌بن‌عبدالله (۱۳۷۹). النجاة. با مقدمه و تصحیح محمدتقی دانش‌پژوه. تهران: دانشگاه تهران.

۲. ــــــــــــ (۱۴۰۴ق). الشفاء، «الطبیعیات» (ج۱). چاپ دوم. به تحقیق سعید زاید. قم: مکتبة آیة الله المرعشی.

۳. ارسطو (۱۳۶۳). طبیعیات. ترجمه مهدی فرشاد. تهران: امیرکبیر.

۴. ــــــــــــ (۱۳۷۸). سماع طبیعی. ترجمه محمد حسن لطفی. تهران: طرح نو.

۵. جوادی آملی، عبدالله (۱۳۹۵). رحیق مختوم (ج۱۶). قم: انتشارات إسراء.

۶. حسن‌زاده آملی، حسن (۱۳۶۵). هزار و یک نکته. چاپ پنجم. تهران: مرکز نشر فرهنگی رجاء.

۷. صدرالدین شیرازی، محمدبن‌ابراهیم (۱۴۱۰ق.). الحکمة المتعالیة في الاسفار العقلیة الاربعة (ج۲). بیروت: دار إحیاء التراث العربي.

۸. طباطبایی، سید محمدحسین (۱۴۲۴ق.). نهایة الحکمة. به تحقیق عباس‌علی زارعی سبزواری. قم: مؤسسه نشر اسلامی.

۹. قطب‌الدین شیرازی، محمدبن‌مسعود (۱۳۸۳). شرح حکمة الإشراق. به اهتمام عبدالله نورانی و مهدی محقق. تهران: انجمن آثار و مفاخر فرهنگی.

۱۰. کانت، ایمانوئل (۱۳۶۷). تمهیدات. ترجمه حداد عادل. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۱۱. ــــــــــــ (۱۳۶۲). سنجش خرد ناب. ترجمه میر شمس الدین ادیب سلطانی. تهران: امیرکبیر.

۱۲. لین، شوییِنگ تی؛ لین، یو فنگ (۱۳۸۸). نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن. چاپ سیزدهم. ترجمه عمید رسولیان. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۱۳. مصباح یزدی، محمدتقی (۱۳۹۳). تعلیقة علی نهایة الحکمة. قم: مؤسسه آموزشی و پژوهشی امام خمینی ﷺ.

۱۴. میراحمدی، سید سعید (۱۳۹۶). امکان بحث و اقامه برهان در باب «نامتناهی»، پایان‌نامه سطح ۳ حوزه علمیه قم.

۱۵. میراحمدی، سید سعید؛ پارسانیا، حمید (۱۴۰۱). «بررسی سازگاری «امتناع نامتناهی بالفعل» با «امکان نامتناهی بودن زمان و حوادث گذشته»»، حکمت اسلامی، ۹(۱)، ص۱۱۹-۱۳۳.

۱۶. میراحمدی، سید سعید؛ پارسانیا، حمید؛ احترامی، رحمان (۱۴۰۱). «بررسی برهان‌پذیریِ

«نامتناهی بالفعل»»، حکمت اسلامی، ۹(۳)، ص۱۷۵-۱۹۳.

۱۷. میرداماد، محمدباقر بن‌محمد (۱۳۶۷). القبسات. بـه اهتمـام دکتـر مهـدی محقـق و دیگـران. چاپ دوم. تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

۱۸. هارتناک، یوستوس (۱۳۷۶). نظریه معرفت در فلسفه کانـت. با ترجمه غلامعلی حـداد عـادل. تهران: فکر روز.

19. Abian, A.; LaMacchia, S. (1978). "On the consistency and independence of some set-theoretical axioms". *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 19 (1). p. 155-8.
20. Cantor, G. (1891). "Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1: p. 75–78. For an English translation see: W. B. Ewald (ed.) (1996). *From Immanuel Kant to David Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Volume 2, Oxford University Press, p. 920–922.
21. Dawson, R. (2015). "Wittgenstein on Set Theory and the Enormously Big," *Philosophical Investigations,* 39(4), p. 313-334.
22. Forster, T. (2003). *Logic, induction and sets* (No. 56). Cambridge University Press.
23. Gitsoulis, C. (2018). "Wittgenstein on Cantor's Proof," In G. M. Mras, P. Weingartner, B. Ritter (eds.) (2018). *Philosophy of Logic and Mathematics: Contributions of the 41st International Wittgenstein Symposium*. p. 67-69.
24. Hrbacek, K.; Jech, T. (1999). *Introduction to set theory*. 3rd edition. New York: Marcel Dekker. Inc.
25. Mendelson, E. (1956). "Some Proofs of Independence in Axiomatic Set Theory". *The Journal of Symbolic Logic*. 21(3). p. 291-303.
26. Sheppard, B. (2014). *The Logic of Infinity (illustrated ed*.), Cambridge University Press.
27. Simmons, K. (1990). "THE DIAGONAL ARGUMENT AND THE LIAR," *Journal of Philosophical Logic*, 19: p. 277-303.
28. Simmons, K. (1993). Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument. Cambridge University Press.
29. Therrien, V. L. (2012). "Wittgenstein And Labyrinth Of 'Actual Infinity': The Critique Of Transfinite Set Theory," *Ithaque*, 10, p. 43-65.
30. Zhuang C., "Wittgenstein's analysis on Cantor's diagonal argument," PhilArchive copy v1:https://philarchive.org/archive/ZHUWAO.