

## بررسی برهان پذیري «نامتناهی بالفعل»

سید سعید میراحمدی<sup>۱</sup>، حمید پارسانیا<sup>۲</sup>، رحمان احترامی<sup>۳</sup>

### چکیده

موضوع نامتناهی بالفعل که مسائلی همچون تناهی یا عدم تناهی ابعاد عالم، امکان وجود جزء لایتجزی، امکان وجود نامتناهی شیء، تناهی یا عدم تناهی زمان و حوادث گذشته، و تسلسل در سلسله علل و معالیل را شامل می‌شود، از دیرباز مورد توجه و اختلاف اندیشمندان بوده است. برخی از آنان بر امتناع نامتناهی بالفعل و برخی بر امکان آن، براهینی اقامه کرده‌اند. عده‌ای نیز ادله طرفین را ناتمام دانسته و در مسأله توقف کرده‌اند. در پی تلاش‌های کانتور پذیرفته شد که نامتناهی بالفعل، قابل اثبات یا ابطال منطقی نیست. با قبول برهان ناپذیری و تصمیم ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل و استقلال آن از ریاضیات متناهی، در نهایت، در نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، اصل موضوع نامتناهی به عنوان یکی از اصول موضوعه پذیرفته شد. در این نوشتار، علاوه بر نشان دادن استقلال نامتناهی بالفعل از ریاضیات متناهی، براهینی جهت اثبات برهان ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل ارائه می‌شود. روشن می‌شود که براهین ریاضیاتی ابطال نامتناهی بالفعل (مانند تطبیق، طرف و وسط، سلمی و غیره)، برهان به معنای منطقی آن نیستند، بلکه تنها جنبه تنبیهی دارند و در صدد روشن کردن هر چه بیشتر لوازم پذیرش مفهوم نامتناهی بالفعل هستند تا در سایه آن، بتوان به قابلیت تصدیق امکان یا امتناع نامتناهی بالفعل دست یافت.

**واژگان کلیدی:** نامتناهی بالفعل، براهین ریاضیاتی، تسلسل، حدوث زمانی عالم، تناهی ابعاد، برهان ناپذیری، تصمیم ناپذیری.

mirahmadi@bou.ac.ir

۱. دانشجوی دکتری فلسفه فیزیک دانشگاه باقر العلوم علیه السلام

h.parsania@yahoo.com

۲. دانشیار و عضو هیئت علمی دانشکده علوم اجتماعی، دانشگاه تهران

asefehteram@gmail.com

۳. دکتری تخصصی فلسفه و کلام اسلامی از مؤسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران-تهران

نحوه استناد: میراحمدی، سیدسعید؛ پارسانیا، حمید؛ احترامی، رحمان (۱۴۰۱).

«بررسی برهان پذیري «نامتناهی بالفعل»»، حکمت اسلامی، ۹ (۳)، ص ۱۷۵-۱۹۳.



## مقدمه

موضوع نامتناهی بالفعل<sup>۱</sup> که مسائلی همچون تناهی یا عدم تناهی ابعاد عالم، امکان وجود جزء لایتجزی، امکان وجود نامتناهی شیء، تناهی یا عدم تناهی زمان و حوادث گذشته و تسلسل در سلسله علل و معالیل را شامل می‌شود، از دیرباز مورد توجه و اختلاف اندیشمندان بوده است. برخی وجود نامتناهی بالفعل شیء در عالم را ضروری می‌دانند. متکلمین قائل به امتناع نامتناهی بالفعل بوده‌اند اما اکثر فلاسفه شروطی برای امتناع آن ذکر کرده‌اند. عده‌ای نیز ادله طرفین در اثبات امکان یا امتناع نامتناهی بالفعل را ناتمام دانسته و در مسأله توقف کرده‌اند (مصباح یزدی، ۱۳۹۳، ص ۵۳۵). عده‌ای دیگر، صورت منطقی ادله طرفین را صحیح دانسته و تناقض حاصل را ناشی از مفهوم نامتناهی بالفعل دانسته‌اند (کانت، ۱۳۶۲، ص ۴۱۵-۳۹۶؛ همو، ۱۳۶۷، ص ۱۹۸-۱۸۶). سرمایه‌ای که در طول تاریخ و در نتیجه ممارست و کوشش دانشمندان بزرگ و بسیاری از متفکرین گردآوری شده بود، کانتور<sup>۲</sup> را به این نتیجه رساند که نامتناهی بالفعل، در حوزه ریاضیات قابل اثبات یا ابطال منطقی نیست. البته کانتور با تمسک به براهینی فلسفی و الاهیاتی (غیر ریاضیاتی)، آفرینش نامتناهی شیء را امری ضروری و واقع شده می‌دانست. با روشن شدن برهان ناپذیری<sup>۳</sup> ریاضیاتی نامتناهی بالفعل و استقلال آن از ریاضیات متناهی (Forster, 2003, P: 209; Hrbacek, Jech, 1999, )

---

۱. منظور از «نامتناهی بالفعل» در این نوشتار، نامتناهی بودن ناظر به اشیاء از حیث کمیت است؛ اعم از کمّ منفصل (مانند نامتناهی شیء) و کمّ متصل (مانند خطی نامتناهی یا جسمی نامتناهی). البته اهمیت بررسی برهان‌پذیری وجودی نامتناهی که «بسیط الحقیقة کل الأشیاء و لیس بشیء منها» است نیز پوشیده نیست.

2. Cantor Georg (1874-1918).

۳. طبق تعریف، به گزاره‌ای که در یک دستگاه اصل موضوعی، نه خودش قابل اثبات باشد و نه نقیضش، گزاره «برهان‌ناپذیر» می‌گوییم. البته منظور از برهان‌ناپذیری نامتناهی بالفعل در اینجا این است که هیچ دستگاه اصل موضوعی وجود ندارد که بتوان در آن، برهانی بر نامتناهی بالفعل اقامه کرد. در بسیاری از متون به جای واژه «برهان‌ناپذیر» از واژه «تصمیم‌ناپذیر» (undecidable) استفاده می‌شود. در این مقاله، از واژه «برهان‌ناپذیر» (unprovable) استفاده خواهیم کرد.

مجموعه‌ها<sup>۱</sup>، اصل موضوع نامتناهی<sup>۲</sup> به‌عنوان یکی از اصول موضوعه پذیرفته شد.<sup>۳</sup> بنابراین براهینی مانند تطبیق، طرف و وسط، سُلَمی، مُسامته و بقیه براهین ریاضیاتی<sup>۴</sup>، همگی از لحاظ منطقی مخدوشند و نیازی به بررسی اعتبار تک تک آنها به‌طور جداگانه نیست. براهین اقامه‌شده و یا براهینی از این دست که در آینده اقامه شوند، برهان به معنای منطقی آن نیستند، بلکه تنها جنبه تنبیهی دارند و در صدد روشن کردن هر چه بیشترِ لوازمِ پذیرش مفهوم نامتناهی بالفعل هستند تا در سایه آن، بتوان به قابلیت تصدیق امکان یا امتناع نامتناهی بالفعل دست یافت.

از آنجاکه در بین متفکرین معاصر، عده‌ای صحت برخی از براهین اقامه‌شده بر امتناع نامتناهی بالفعل را پذیرفته‌اند (Craig, 1979; Craig, Smith, 1995, P.97-99) و بعضی نیز ادله موجود را ناتمام دانسته و در مسأله توقف کرده‌اند (مصباح یزدی، ۱۳۹۳، ص ۵۳۵) و همچنین بسیاری نیز بدون اشاره به برهان ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل به بررسی صحت یا سقم برخی از براهین ریاضیاتی اقامه‌شده بر امتناع نامتناهی بالفعل می‌پردازند (کهنسال، ۱۳۸۱؛ طالب‌زاده، ۱۳۸۵؛ خادم‌زاده و سعیدی‌مهر، ۱۳۸۸؛ زارع و حسینی، ۱۳۹۴)، روشن می‌شود که موضوع برهان ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل مورد غفلت و یا شاید انکار آنها واقع شده است. از این رو، در این نوشتار در قسمت دوم، برهانی بر برهان ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل اقامه می‌کنیم. در قسمت ۱، به نظر برخی از متفکرین در باب نامتناهی بالفعل اشاره‌ای کوتاه خواهیم داشت.

## ۱. مسأله نامتناهی

آیا وجود مجموعه‌ای از اشیاء به‌طوری که همه آنها در آن واحد موجود باشند و در عین حال اعضای آن از هر تعداد متناهی (مثل ۱۰۰، ۱۰۰۰ و بقیه اعداد متناهی) بیشتر باشد، ممکن است؟ ستاره‌های موجود در کیهان چندتا است؟

ارسطو معتقد است وجود نامتناهی بالفعل شیء که مجتمع در وجود باشند، محال است (ارسطو، ۱۳۶۳، ص ۱۲۴-۱۲۰؛ همو، ۱۳۷۸، ص ۱۲۴-۱۲۳). بنابراین وی فرایند تقسیم یک پاره‌خط را

1. Axiomatic set theory.

2. Axiom of infinity.

۳. البته با توجه به استقلال «نامتناهی بالفعل» از ریاضیات متناهی، می‌توان به جای اصل موضوع نامتناهی، نقیض آن را به‌عنوان اصل موضوع پذیرفت. سازگاری این دستگاه جدید نیز مانند سازگاری دستگاه اصل موضوعی رایج است.

۴. برهان ریاضیاتی، برهانی است که در آن، «کمیت» مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد. در این براهین معمولاً از واژه‌هایی مثل «عدد»، «مقدار»، «مساوی»، «کمتر»، «بیشتر»، «کوچک‌تر»، «بزرگ‌تر»، «وسط»، «طرف»، «جمع»، «تفریق»، «ضرب»، «تقسیم» و مانند آنها استفاده می‌شود.

به صورت نامتناهی لایقنی یا نامتناهی بالقوه ممکن می‌داند، نه نامتناهی بالفعل. ابن سینا وجود نامتناهی بالفعل از موجودات مادی که مجتمع در وجود باشند را غیرممکن می‌داند (ابن سینا، ۱۴۰۴ق، ج ۱، ص ۲۱۲). اما در عین حال، وی نه تنها وجود نامتناهی بالفعل از موجودات مجرد را محال نمی‌داند، بلکه بیان می‌کند که بر نامتناهی بودن آنها برهان وجود دارد (همو، ۱۳۷۹، ص ۲۴۶). ملاصدرا (صدرالدین شیرازی، ۱۴۱۰ق، ج ۲، ص ۱۴۷) و اکثر فیلسوفان مسلمان، به تبع ابن سینا وجود مجموعه‌ای نامتناهی از اشیاء را در صورتی محال می‌دانند که سه شرط «فعلیت همه اعضا، اجتماع در وجود و ترتب اعضا نسبت به یکدیگر» محقق باشد. ایشان با وضع شرط «اجتماع در وجود»، سلسله‌ای نامتناهی از حوادث گذشته را از دایره نامتناهی محال خارج کرده و در نتیجه بدون آغاز، بودن حرکت و زمان را ممکن می‌دانند. غالباً در این مبحث از دو نوع ترتب نام برده می‌شود: ترتب وضعی (ترتیب بین اجسام) و ترتب طبعی (ترتیب میان علت و معلول). ایشان به کمک شرط ترتب، مجموعه‌هایی مانند مجموعه نامتناهی بالفعل از موجودات مجرد را از دایره نامتناهی محال خارج می‌کنند (قطب‌الدین شیرازی، ۱۳۸۳، ص ۱۷۸-۱۷۷؛ ابن سینا، ۱۳۷۹، ص ۲۴۶-۲۴۵). اما سخن علامه طباطبایی در این باره که می‌فرماید «اگر اجزاء به صورت بالفعل و مجتمع در وجود باشند اما ترتبی میان آنها نباشد محالی لازم نمی‌آید، مانند تعداد نامتناهی از موجوداتی که هیچ‌گونه رابطه علیت و معلولیت میان آنها برقرار نیست» (طباطبایی، ۱۴۲۴ق، ص ۲۲۰)، گویای این مطلب است که ایشان برای استحاله تسلسل، شرط ترتب طبعی را شرطی لازم دانسته و ترتب وضعی را کافی نمی‌داند. بنابراین او وجود سلسله‌ای که دارای سه شرط فعلیت اعضا، اجتماع آنها و ترتب وضعی باشد را ممتنع نمی‌داند. به طور مثال، از نظر ایشان وجود نامتناهی بالفعل ستاره در عالم، محال نیست.

از شروطی که ابن سینا و پیروان او برای استحاله نامتناهی بالفعل ذکر کرده‌اند، متکلمین تنها شرط نخست (یعنی «فعلیت اعضا») را می‌پذیرند. به نظر ایشان، وجود مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اشیاء محال است؛ حتی اگر اعضا مجتمع در وجود نبوده و هیچ ترتبی بین آنها وجود نداشته باشد.

آیت‌الله حسن زاده آملی هیچ‌کدام از براهین هشت‌گانه تطبیق، سُلمی، لام اُلفی، تُرسی، سید سمرقندی، مُسامته، تخلیص و عرشی که جهت اثبات تناهی ابعاد عالم ماده اقامه شده‌اند را تمام ندانسته و در نهایت، نامتناهی بودن ابعاد عالم ماده را می‌پذیرد (سبزواری، ۱۳۷۹، ج ۴، ص ۱۸۶). ایشان نه تنها وجود نامتناهی بالفعل شیء در عالم را محال نمی‌دانند، بلکه با تمسک به غیر متناهی بودن حق تعالی، وجود نامتناهی شیء در عالم جسمانی را محقق و ضروری می‌دانند. بیان ایشان چنین است:

«باید در کثرت أشعه عقلیّه و تمایز انوار نوریه و تعدد ملائکه الله تعالی و جنود الهی تدبر کرد که بدون مظاهر و مجالی چگونه کثرت دارند تا منتهی شوی به این حقیقت که هو الاول و الآخر و الظاهر و الباطن، و او صمد حق غیر منتهای است و کلمات او که اطوار و شئون اسمائی او هستند، غیر منتهای است، و از اینجا انتقال یابی که کلمات عالم جسمانی نیز غیر منتهای است و تناهی ابعاد به تباهی است» (حسن زاده آملی، ۱۳۶۵، ص ۵۱۰).

آیت الله مصباح یزدی، براهین سلّمی، مُسامته و تطبیق که در آنها از مقدماتی ریاضی استفاده شده است را دارای یک اشکال واحد می دانند. به عقیده ایشان، احکام ریاضی مختص به مقادیر منتهای است و تعمیم این احکام به حوزه نامتناهی صحیح نیست (مصباح یزدی، ۱۳۹۳، ص ۲۷۷). ایشان این مطلب که صدق «عدد» تنها بر امور محدود و منتهای جایز باشد و امور نامتناهی به خاطر نامتناهی بودنشان معروض عدد قرار نگیرند را ممکن دانسته و این را تأییدی بر این مطلب می دانند که «کم»، امری اعتباری است (همان، ص ۱۹۰). استاد مصباح یزدی اکثر براهین اقامه شده بر ابطال تسلسل را قابل مناقشه می داند: «و للمناقشة في جُلّها مجالٌ واسع» (همان، ص ۱۸۹). ایشان در مقام اشکال به «تمسک به مطلق بودن فاعلیت خداوند متعال و سرمدیت فیض و دوام جود او جهت اقامه برهان بر قدم عالم و نفی مبدأ زمانی از آن» می فرمایند: محدودیت عالم اجسام از حیث زمان یا از حیث مکان به خاطر ذات خودش می باشد؛ چراکه حجّت بر عدم نامتناهی بودن آن اقامه شده است، نه به خاطر امساک واجب تعالی از توسعه آن و افاضه بر آن (همان، ص ۵۳۵-۵۳۳). اما ایشان در استدراک از این مطلب و در اظهار نظر نهایی می فرمایند که براهین اقامه شده بر اثبات تناهی ابعاد و تناهی زمان مخدوش هستند. بنابراین تا زمان دست یابی به برهانی قاطع می بایست این دو مسأله را در بقعه امکان احتمالی باقی گذاشت. بیان ایشان چنین است:

«لکن قد عرفت قصور البراهین عن إثبات تناهي الأبعاد و تناهي الزمان، فنذر المسألتين في بقعة الإمكان، حتّي يذودنا عنهما قائم البرهان، و الله المستعان» (همان، ص ۵۳۵).

آیت الله جوادی آملی برهان «طرف و وسط» در اثبات امتناع تسلسل در سلسله علل را خالی از اشکال ندانسته است (جوادی آملی، ۱۳۸۶، ج ۲، بخش ۳، ص ۲۹). اما صحت برهان تطبیق را در صورت تحقق شروط سه گانه فعلیّت، اجتماع در وجود و ترتّب اعضاء پذیرفته اند (همان، ص ۶۳-۳۱). به عقیده ایشان، در به کارگیری برهان تطبیق، شرط وجود «اتّصال»، شرطی لازم و ضروری است و بنابراین این برهان توان اثبات استحاله وجود بی نهایت جسم منتهای را ندارد. بیان ایشان در این باره چنین است:

«تحریر برهان تطبیق و مانند آن براساس اتصال جسم طبیعی و حجم طبیعی و حجم تعلیمی و سطح و خط است. ولی بر مبنای ترکیب جسم طبیعی از ذرات ریز اتمی، نه جسم طبیعی متصل آن طوری که محسوس است موجود می‌باشد و نه حجم و جسم تعلیمی و نه سطح و نه خط؛ زیرا هرگز ذرات گسیخته از یکدیگر، با تضاریس نامحسوس خود اجازه عروض حجم متصل، سطح متصل و خط متصل را نخواهند داد. قهراً هیچ بُعد متصلی عارض آن ذرات نمی‌شود. البته برای هر ذره‌ای بُعد متصل خاص خواهد بود. لیکن هیچ کدام به دیگری متصل نیستند و اگر چنین ذرات گسیخته‌ای نامتناهی باشند، دلیلی بر امتناع آنها نخواهند بود، هر چند برهان تطبیق تام باشد؛ زیرا برهان تطبیق مبتنی بر اتصال اجزاء است و آن پیوستگی متوقع فقط در وهم است و در خارج، حجم هندسی، سطح هندسی و خط هندسی جز در محدوده خود ذرات ریز اتمی اصلاً وجود ندارد؛ نه متناهی و نه نامتناهی» (همان، ص ۱۵۲).

ایشان پس از پذیرش تناهی ابعاد عالم، در صدد تبیین رابطه بین تناهی ابعاد و نامتناهی بودن فیض خداوند متعال برآمده و چنین می‌فرمایند:

«بین تناهی ابعاد و تناهی فیض خداوند هیچ‌گونه استلزام یا تلازم وجود ندارد، نه آنکه معتقد به عدم تناهی فیض واجب است توان افتاء به ضرورت عدم تناهی ابعاد را دارد و نه آنکه معتقد به امکان عدم تناهی ابعاد می‌باشد، قدرت افتاء به ضرورت عدم تناهی فیض خدا را داراست. بُعد هر جسمی متناهی است، لیکن فیض خداوند نامحدود است و عدم تناهی فیض نه تنها در عالم عقل و عالم مثال محقق است، بلکه در عالم طبیعت نیز محقق خواهد بود؛ خواه به صورت اجرام محدود متدرج در گستره زمان نامحدود، و خواه به طور اجسام متناهی از لحاظ بُعد و نامحدود از لحاظ عدد» (همان، ص ۱۵۵).

هر چند که قسمت پایانی نقل قول فوق، بیانگر آن است که آیت الله جوادی آملی وجود تعداد نامتناهی جسم متناهی را ممکن می‌دانند؛ اما به نظر می‌رسد که نظر نهایی ایشان استحاله وجود نامتناهی شیء مادی باشد؛ چرا که ایشان در ذیل عنوان «دلیل استحاله نامتناهی شیء مادی»، پذیرش نامتناهی شیء مادی و قبول امتناع تداخل اجسام را مستلزم نامتناهی بودن مکان دانسته که به عقیده ایشان دلیل امتناع آن تام است (جوادی آملی، ۱۳۹۵، ج ۱۶، ص ۳۵۳). به عقیده ایشان، نامتناهی شیء نیازمند به وجود نامتناهی علت است و این امر منجر به تسلسل در سلسله علل یا تعدد سرسلسله می‌شود که هر دو محال است. در نتیجه وجود نامتناهی شیء، چه مادی و چه مجرد، محال است (جوادی آملی، ۱۳۹۵، ج ۱۶، ص ۳۵۴-۳۵۳).

در مغرب زمین، در قرون وسطی این شعار بر فلسفه مدرسی<sup>۱</sup> حاکم بوده است که «نامتناهی بالفعل وجود ندارد (infininitum actu non datur). این وضع، در دوره رنسانس هم تغییر چندانی نکرد.

برخی از تجربه‌گرایان<sup>۲</sup> معتقد بودند که می‌بایست مفهوم «نامتناهی بالفعل» را به‌کلی کنار گذاشت؛ چراکه ما هرگز نمی‌توانیم در عمل و تجربه با آن مواجه شویم. حتی تجربه‌گرایان افراطی‌تر انگلیسی عقیده داشتند که می‌بایست از تمام صور مختلف نامتناهی پرهیز کرد. با وجود اینکه ارسطو احساس می‌کرد می‌تواند زمان و بُعد را به‌صورت نامتناهی بالقوه تقسیم‌پذیر بداند، برکلی<sup>۳</sup> و هیوم<sup>۴</sup> حتی این نظر او را نپذیرفتند. آنها عقیده داشتند که مفهوم نامتناهی چیزی است که هم می‌توانیم و هم باید آن را کنار بگذاریم و بدون آن کار را ادامه دهیم. اما پاسخ واقع‌گرایان<sup>۵</sup> این بود که ما می‌توانیم مفهوم نامتناهی را بفهمیم؛ اگرچه نمی‌توانیم آن را تجربه و یا تصور کنیم. دکارت<sup>۶</sup> معتقد بود که ایده نامتناهی توسط خداوند در درون و ذهن ما جاسازی شده است. در حقیقت، این امر، اساس یکی از براهین او بر اثبات وجود خداوند است (Craig, 1998, vol. 4, P. 773-775).

موضوع «نامتناهی» در فلسفه کانت<sup>۷</sup> از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ چراکه سه تا از چهار حکم جدلی‌الطرفینی<sup>۸</sup> که او در کتاب‌های نقد عقل محض و تمهیدات مطرح کرده و مورد بررسی قرار داده است، مستقیماً مربوط به مسأله نامتناهی است (کانت، ۱۳۶۲، ص ۴۱۵-۳۹۶؛ همو، ۱۳۶۷، ص ۱۹۸-۱۸۶). وی پس از بیان این چهار قضیه جدلی‌الطرفین می‌گوید: «درواقع اگر نقادی ناگزیر خود را نادیده انگاریم، تضاد دور از انتظاری پیدا می‌شود که رفع آن هرگز به طریقه جزئی معمول ممکن نیست؛ چراکه می‌توان هم «وضع»<sup>۹</sup> و هم «وضع مقابل»<sup>۱۰</sup> را با دلایلی بالسویه بدیهی و

1. Scholastic philosophy.
2. Empiricist.
3. Berkeley George (1685-1753).
4. Hume David (1711-1776).
5. Rationalist.
6. Descartes René (1596-1650).
7. Kant Immanuel (1724-1804).
8. Antinomy.
9. Thesis.
10. Antithesis.



واضح و خدشه‌ناپذیر - که من خود صحت همه آنها را تضمین می‌کنم - اثبات کرد، و بدین سان عقل می‌بیند که در خودش، علیه خودش دو دستگی به وجود آمده است...» (همو، ۱۳۶۷، ص ۱۸۸).<sup>۱</sup>

اکثر متفکرین و ریاضی‌دانان قرن نوزدهم با دیدگاه گاوس<sup>۲</sup> موافق بودند. گاوس در نامه‌ای به شوماخر<sup>۳</sup> بیان می‌کند که نامتناهی چیزی نیست، مگر آنچه که هنگام صحبت کردن از حدود، به ما کمک می‌کند:

«من مخالفم که نامتناهی به عنوان یک چیز کامل و بالفعل که هرگز در ریاضیات مجاز نیست به کار گرفته شود. نامتناهی فقط راه و روش سخن گفتن است؛ معنای صحیح بودن یک حد که نسبت‌های معین همواره نزدیک می‌شوند. درحالی که بقیه مجازند به صورت نامحدود افزایش یابند» (Dauben, 1979, p. 120).

تلاش جدی و مؤثر در باب «نامتناهی بالفعل» در حوزه ریاضیات، با بولزانو<sup>۴</sup> و کانتور در قرن نوزدهم شروع شد. بولزانو در کتاب "متناقض‌نماهای نامتناهی" ابتدا به تعریف نامتناهی می‌پردازد و سپس سعی می‌کند تا تناقضات آن را پاسخ دهد. به عقیده وی، «نامتناهی یعنی بزرگ‌تر بودن از هر کمیت متناهی ممکن» (Russ, 2004, p.606).

کانتور نیز نظریه مجموعه‌های نامتناهی را پایه‌گذاری کرد و آن را توسعه داد:

«بنابراین من تمایز قائل می‌شوم بین یک نامتناهی غیر مخلوقِ ازلی یا نامتناهی مطلق که مربوط به خداوند است و صفات او، و یک مخلوقِ نامتناهی یا بی‌نهایت که باید همه‌جا در طبیعتِ مخلوق مورد توجه باشد. برای مثال، با توجه به اعتقادِ راسخ من، تعداد نامتناهی بالفعل از افراد مخلوقات، در جهان، به همان وضوح در زمین ما و به بیشترین احتمال حتی در هر قسمت به اندازه دلخواه کوچک [متصل و] توسعه یافته از فضا (Cantor, 1932, P. 399).

یک استدلال، بر پایه معنا و مفهوم خداوند است. نخست، از کمال مطلق بودن خدا به

۱. برخلاف نظر کانت - که صحت براهین هر دو طرف محل نزاع را تضمین می‌کرد - در پی تلاش‌های کانتور پذیرفته شد که «نامتناهی بالفعل» از لحاظ منطقی اثبات‌پذیر و یا ابطال‌پذیر نیست و براهین هر دو طرف باطل است. اکثر ریاضی‌دانان معاصر، برهان‌ناپذیری و تصمیم‌ناپذیری «نامتناهی بالفعل» را پذیرفته‌اند. در قسمت بعد، برهانی بر برهان‌ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل اقامه خواهیم کرد.

2. Gauss Carl Friedrich (1777-1855).  
3. Schumacher.  
4. Bolzano Bernard (1781-1848).

امکان آفرینش نامتناهی پی می‌بریم. سپس از سراسر فیض و شکوه بودن او به این ضرورت پی می‌بریم که آفرینش و خلق نامتناهی در حقیقت محقق شده است» (Ibid, P.400).

تلاش‌های کانتور برای وارد کردن مفهوم نامتناهی بالفعل در ریاضیات از همان ابتدا با انتقادات بسیاری از ریاضی‌دانان، از جمله کرونگر<sup>۱</sup> و پوانکاره<sup>۲</sup> روبه‌رو شد. پوانکاره معتقد بود که:

«نامتناهی بالفعل وجود ندارد. آنچه که ما نامتناهی می‌نامیم، تنها امکان بدون توقّف ساختن اشیاء جدید است بدون توجه به اینکه چه تعداد قبلاً موجود شده است» (Kline, 1982, p.233).

نامتناهی بالفعل وجود ندارد. آنچه که پیروان کانتور فراموش کرده و در دام تناقضات گرفتار شده‌اند (Ewald, 1996, vol. 2, P.1070). بیشتر ایده‌های نظریه مجموعه‌های کانتور باید از ریاضیات دور ریخته شود؛ یک‌بار و برای همیشه» (Dauben, 1979, P.266).

اما هیلبرت<sup>۳</sup> موافقت خود با نظریه کانتور را این‌گونه ابراز کرد:

«هیچ کس ما را از بهشتی که کانتور برای ما ساخته است بیرون نخواهد کرد» (Van Heijenoort, 1967, P. 376).

نظریه کانتور بعد از حمایت هیلبرت سرانجام به‌طور گسترده توسط ریاضی‌دانان پذیرفته شد؛ به‌طوری که بسیاری از ریاضی‌دانان معاصر در مبحث نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها<sup>۴</sup>، وجود مجموعه تمام اعداد طبیعی به‌صورت بالفعل را در قالب «اصل موضوع نامتناهی»<sup>۵</sup> پذیرفته‌اند. باین حال، بروئر<sup>۶</sup> و پیروان مکتب شهودگرایی<sup>۷</sup> او نیز با نظریه نامتناهی کانتور مخالف بوده‌اند.

1. Kronecker Leopold (1823-1891).
2. Poincaré Henri (1854-1912).
3. Hilbert David (1862-1943).
4. Axiomatic set theory.
5. Axiom of infinity.
6. Brouwer Luitzen Egbertus Jan (1881-1966).
7. Intuitionism.

ویتگنشتاین<sup>۱</sup> معتقد بود که توجه کافی به آنچه که او «گرامر» نامتناهی می‌نامید (یعنی محدودیت‌های اساسی ویژه نسبت به آنچه که می‌تواند به‌عنوان استفاده معنادار در مورد واژه نامتناهی باشد)، نشده است. در واقع او استدلال می‌کرد که واژه نامتناهی نمی‌تواند به‌صورت طبقه‌بندی مورد استفاده قرار گیرد. وی همچنین نسبت به تفسیر برهان قطری کانتور نیز اشکالاتی را مطرح می‌کرد (Craig, 1998, vol. 4, P.776; Zhuang<sup>۲</sup>). او با اشاره به کلام هیلبرت، چنین می‌گفت:

«من می‌گویم: من فکرِ تلاش برای بیرون کردن کسی از این بهشت را در سر نمی‌پرورانم. من کار کاملاً متفاوتی انجام خواهم داد. من سعی خواهم کرد که به شما نشان دهم که این یک بهشت نیست. بنابراین شما با موافقت خودتان آن را ترک خواهید کرد» (Wittgenstein, 1989, P.103).

اگر شخصی می‌تواند آن [نظریه کانتور] را به‌عنوان بهشتِ ریاضی دانان ببیند، چرا نباید دیگری آن را به‌عنوان یک شوخی ببیند؟» (Wittgenstein, 1978, P.264).

در دنیای ریاضیات، تا قبل از کانتور اگرچه متناقض‌نماهایی مانند متناقض‌نماهای زنون<sup>۳</sup> در مورد نامتناهی بالفعل مطرح بوده است، اما واژه نامتناهی یا بی‌نهایت، همواره در اکثر موارد به معنای نامتناهی لایقنی به‌کار می‌رفته است. به‌طور مثال، اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق.م) در کتاب «اصول» خود برای اینکه اثبات کند تعداد اعداد اول بی‌نهایت است، این‌گونه استدلال کرده است که فرض متناهی بودن تعداد اعداد اول، منجر به تناقض می‌شود. بنابراین ایشان با استفاده از روش برهان خلف، عملاً نیاز به تعریف و استفاده از نامتناهی بالفعل را مرتفع کرده است. البته گفته شده است که ارشمیدس (حدود ۲۱۲-۲۸۷ ق.م) در کتاب «روش» در قضیه‌ای که حجم کره را برابر با  $\frac{1}{3}$  حجم استوانه محیطی آن محاسبه کرده، از مفهوم نامتناهی بالفعل استفاده کرده است (Stillwell, 2010, P. 20-21).

(برای مطالعه بیشتر در مورد تاریخچه «نامتناهی» و برهان‌پذیری آن، نظریه مجموعه‌های نامتناهی کانتور و برخی نتایج حاصل از آن رجوع کنید به: میراحمدی، ۱۳۹۶)

## ۲. بررسی برهان‌پذیری نامتناهی بالفعل

برای جلوگیری از ایجاد هر گونه ابهام در مورد مفهوم واژه «نامتناهی بالفعل»، ابتدا لازم است تا تعریفی از آن ارائه کرده و یا آن را با یک خصوصیت منحصر به فرد مشخص کنیم. منظور از

1. Wittgenstein Ludwig (1889-1951).

۲. مراجعه به: <https://philarchive.org/archive/zhuwao>

3. Zeno of Elea (Born: around 490 BC).

«خصوصیت منحصر به فرد»، خصوصیتی است که در مورد مجموعه‌های متناهی صادق نباشد. در حوزه علم حساب که موضوع آن کمّ منفصل است، زیر مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اعداد طبیعی را این‌گونه می‌توان تعریف کرد:

تعریف شماره ۱: زیر مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اعداد طبیعی، مجموعه‌ای است بالفعل از اعداد طبیعی با بیش از یک عضو که عنوان «بزرگ‌ترین عضو مجموعه» بر هیچ‌کدام از اعضا صادق نیست.

برای تعریف سلسله‌ای نامتناهی بالفعل از اشیاء، ابتدا می‌بایست واژه «سلسله» را به‌طور دقیق تعریف کنیم. این کار با تعریف یک رابطه<sup>۱</sup> بر روی اجزاء سلسله به سادگی قابل انجام است. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم و به معنای شهودی<sup>۲</sup> «سلسله» اکتفا می‌کنیم.

بنابراین سلسله‌ای نامتناهی بالفعل از اشیاء را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:  
تعریف شماره ۲: سلسله نامتناهی بالفعل، سلسله‌ای است بالفعل با بیش از یک عضو که عنوان «وسط» بر همه اعضا صادق است، مگر حداکثر بر یکی<sup>۳</sup>.

نامتناهی بالفعل دارای خصوصیات منحصر به فرد فراوانی است. در بعضی از موارد، یکی از این خصوصیات به‌عنوان تعریفی برای نامتناهی بالفعل به‌کار گرفته شده است. به‌عنوان مثال، در ریاضیات مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل را به‌صورت زیر به‌گونه‌ای تعریف کرده‌اند که در علم حساب و هندسه - که موضوع آنها به ترتیب کمّ منفصل و کمّ متصل است - قابل به‌کارگیری باشد:

تعریف شماره ۳: مجموعه نامتناهی بالفعل، مجموعه‌ای است بالفعل که حداقل با یکی از زیرمجموعه‌های محض<sup>۴</sup> دارای تناظری یک‌به‌یک<sup>۵</sup> باشد.

اگر شخصی وجود مصداق برای هر یک از تعاریف فوق را محال بداند، می‌تواند برای اثبات

## 1. Relation.

۲. این تعریف بر هیچ سلسله متناهی‌ای صادق نیست، مگر سلسله‌ای دوری. به‌راحتی می‌توان تعریف را دقیق‌تر کرد که بر سلسله‌ای دوری نیز صادق نباشد. مفاد این تعریف در واقع همان چیزی است که برهان «طرف و وسط» در صدد اثبات بطلان آن است.

۳. یک زیرمجموعه محض از مجموعه (الف)، مجموعه‌ای است مشکل از اعضای (الف) که فاقد حداقل یکی از عضوهای (الف) باشد. به‌عبارت دیگر، همه زیرمجموعه‌های مجموعه (الف) به غیر از خود مجموعه (الف)، زیرمجموعه محض مجموعه (الف) هستند.

۴. وقتی گفته می‌شود دو مجموعه (الف) و (ب) دارای تناظری یک‌به‌یک هستند، به زبان ساده به این معناست که می‌توان اعضای دو مجموعه را به‌گونه‌ای به یکدیگر مرتبط کرد (یا در تناظر قرار داد) که هر عضو (الف)، با عضو منحصر به فردی از (ب) در تناظر قرار بگیرد و هر عضو (ب) نیز با عضو منحصر به فردی از (الف) در تناظر باشد.

۵. مفاد این تعریف در واقع همان چیزی است که برهان تطبیق در صدد اثبات بطلان آن است. در واقع، کانتور با تعریف «تساوی» به «وجود تناظری یک‌به‌یک» برای مجموعه‌های نامتناهی بالفعل (که این تعریف برای مجموعه‌های متناهی نیز صادق است) توانست تعریفی جدید از «کمتر» و «بیشتر» برای مجموعه‌های نامتناهی بالفعل ارائه کند.

بطلان نامتناهی بالفعل، براهینی مانند آنچه که در ادامه می‌آید اقامه کند (برهان اول، ناظر به تعریف شماره ۱، برهان دوم مربوط به تعریف شماره ۲ و برهان سوم ناظر به تعریف شماره ۳ می‌باشد):  
برهان ۱: هر زیرمجموعه‌ای بالفعل از اعداد طبیعی با بیش از یک عضو، دارای «بزرگ‌ترین عضو» است. اما زیرمجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اعداد طبیعی، دارای بزرگ‌ترین عضو نیست (تعریف شماره ۱).

نتیجه: وجود زیرمجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اعداد طبیعی، غیر ممکن است.  
برهان ۲: هر سلسله بالفعلی از اشیاء با بیش از یک عضو، عنوان «وسط» بر همه اعضاء صادق است، مگر بر دو عضو. اما سلسله نامتناهی بالفعل، سلسله‌ای است بالفعل با بیش از یک عضو که عنوان «وسط» بر همه اعضاء صادق است، مگر حداکثر بر یکی (تعریف شماره ۲).

نتیجه: وجود مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل، غیر ممکن است.  
برهان ۳: وجود تناظری یک‌به‌یک بین یک مجموعه و یک زیرمجموعه محضش غیر ممکن است. اما مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل، مجموعه‌ای است بالفعل که حداقل با یکی از زیرمجموعه‌های محضش دارای تناظری یک‌به‌یک است (تعریف شماره ۳).

نتیجه: وجود مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل، غیر ممکن است.  
امر مشترک بین براهین سه‌گانه فوق و براهینی از این دست، این است که این براهین در صورتی تام و منتج هستند که به‌طور پیشین پذیرفته باشیم که تمایزی بین احکام ریاضیاتی متناهی و نامتناهی وجود ندارد و همچنین قبول کرده باشیم که تسری احکام ریاضیاتی متناهی به نامتناهی مانعی ندارد. درحالی‌که گزاره «تمایزی بین احکام ریاضیاتی متناهی و نامتناهی وجود ندارد» و همچنین گزاره «تسری احکام ریاضیاتی متناهی به نامتناهی مانعی ندارد»؛ نه بدیهی هستند و نه اثبات‌پذیر. از آنجاکه بدهات گزاره‌های مذکور، در رتبه بدهات امتناع نامتناهی بالفعل است، بنابراین براهین فوق و براهینی از این دست، برهان به معنای منطقی آن نیستند.

به عبارت دیگر، بدهات سه گزاره زیر که در براهین فوق به‌کار رفته، در رتبه بدهات امتناع نامتناهی بالفعل است. درحالی‌که فرض بر این است که امتناع نامتناهی بالفعل امری بدیهی نیست و در نتیجه، گزاره‌های مذکور نیز بدیهی نبوده و نباید در روند برهان به‌کار گرفته شوند. گزاره‌های به‌کار رفته در این براهین، عبارتند از:

۱. هر زیرمجموعه‌ای بالفعل از اعداد طبیعی با بیش از یک عضو، دارای «بزرگ‌ترین عضو» است (به‌کار رفته در برهان ۱).

۲. هر سلسله‌ای بالفعل از اشیاء با بیش از یک عضو، عنوان «وسط» بر همه اعضاء صادق است، مگر بر دو عضو (به کار رفته در برهان ۲).

۳. وجود تناظری یک به یک بین یک مجموعه و یک زیرمجموعه محضش غیر ممکن است (به کار رفته در برهان ۳).

برای مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اشیاء می‌توان تعاریف دیگری نیز ارائه کرد و یا آن را با خصوصیات منحصر به فرد دیگری نیز نشان داد. به راحتی می‌توان نشان داد که سه تعریف فوق، هم‌ارزند. یعنی اینکه اگر در یک دستگاه اصل موضوعی بتوان اثبات کرد که مجموعه‌ای با تعریف شماره ۱ محال است که دارای مصداق باشد، آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که وجود مصداق برای مجموعه‌هایی با تعاریف ۲ و ۳ نیز محال می‌باشد. همچنین اگر بتوان اثبات کرد که وجود مصداق برای مجموعه‌ای با تعریف شماره ۱ غیر ممکن نیست، آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که وجود مصداق برای مجموعه‌هایی با تعاریف ۲ و ۳ نیز غیر ممکن نمی‌باشد. حال، مجموعه‌ای شامل همه گزاره‌های هم‌ارز با تعاریف فوق را در نظر گرفته و آن را با «الف» نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان مجموعه نامتناهی بالفعل را در کلی‌ترین حالت به صورت زیر تعریف کرد:

**تعریف شماره ۴:** مجموعه نامتناهی بالفعل، مجموعه‌ای است دارای خصوصیات ذکر شده در مجموعه «الف».

در ادامه، ابتدا به معنای برهان‌پذیری اشاره شده و سپس در قضیه ۱، استقلال نامتناهی بالفعل از ریاضیات متناهی اثبات می‌شود. در قضیه ۲، نشان داده می‌شود که نامتناهی بالفعل برهان‌ناپذیر است.

### برهان‌پذیری به چه معناست؟

برهان‌پذیر بودن یک گزاره در یک دستگاه اصل موضوعی به این معناست که با پذیرش چند اصل موضوع و به کارگیری قواعد منطقی استنتاج مثل قیاس شکل اول یا قاعده وضع مقدم و غیره، بتوانیم در طی یک یا چند مرحله، گزاره مذکور یا نقیض آن را به عنوان نتیجه به دست آوریم.<sup>۱</sup> بنابراین در یک دستگاه اصل موضوعی سازگار، هیچ‌کدام از اصول موضوعه یا نقیض آنها اثبات نمی‌شوند.

**قضیه ۱:** نامتناهی بالفعل، مستقل از ریاضیات متناهی است.<sup>۲</sup>

۱. در برخی از دستگاه‌ها (مانند دستگاه استنتاج طبیعی در منطق جدید)، قضایا را به صورت یک گزاره شرطی بیان می‌کنند. بنابراین در این دستگاه‌ها تنها از قواعد استنتاج استفاده می‌شود. البته در برخی از دستگاه‌های اصل موضوعی در منطق گزاره‌ها، اصول موضوعه به صورت گزاره‌های شرطی در نظر گرفته شده و از قواعد استنتاج استفاده نمی‌شود.

۲. مفاد این قضیه (یعنی استقلال «نامتناهی بالفعل» از ریاضیات متناهی)، به عقیده برخی، بدیهی و بی‌نیاز از برهان است و به عقیده برخی دیگر، بدیهی و برهان‌ناپذیر.

برهان: می‌خواهیم نشان دهیم که آیا با استفاده از دستگاه ریاضیات متناهی می‌توان برهانی بر امتناع یا امکان نامتناهی بالفعل اقامه کرد یا خیر. بنابراین نسبت به امکان یا امتناع وجود مصداق برای هر یک از تعاریف و خصوصیات ذکر شده در مجموعه «الف» برای نامتناهی بالفعل، پیش‌داوری نمی‌کنیم. در این حالت، جهت اثبات امکان یا امتناع وجود مجموعه‌ای نامتناهی بالفعل از اشیاء نمی‌توان وجود این مجموعه و خصوصیات ذکر شده برای آن در مجموعه «الف» (و یا نقیضشان) را به‌عنوان اصل موضوع انتخاب کرده و یا اینکه در مراحل برهان به‌کار گرفت؛ چراکه در غیر این صورت دچار مصادره به مطلوب خواهیم شد. بنابراین دستگاهی که می‌توان ساخت، دستگاهی است شامل مجموعه‌های متناهی و خصوصیات حاکم بر آنها. روشن است که تعداد مجموعه‌های متناهی پذیرفته شده در این دستگاه نباید نامتناهی بالفعل باشد. بنابراین دستگاه نامتناهی لایق‌فی که در آن تعداد مجموعه‌های متناهی رو به افزایش باشد، بزرگ‌ترین دستگاهی است که برای اثبات و یا ابطال نامتناهی بالفعل در اختیار داریم. روشن است که در دستگاه نامتناهی لایق‌فی با استفاده از اعمال ریاضیاتی مثل جمع، تفریق، تقسیم، ضرب و ارزیابی‌ها و مقایسات کمی، همواره در حوزه نامتناهی لایق‌فی (و یا به‌عبارت بهتر، در حوزه متناهی لایق‌فی) باقی خواهیم ماند و هرگز نفیاً و یا اثباتاً نمی‌توان در مورد نامتناهی بالفعل اظهار نظر کرد. در نتیجه نامتناهی بالفعل، مستقل از ریاضیات متناهی است.

**قضیه ۲:** نامتناهی بالفعل برهان‌ناپذیر است (اثبات برهان‌ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل).

برهان: جهت اثبات برهان‌ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل، در قسمت (الف) ابطال‌ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل و در قسمت (ب) اثبات‌ناپذیری آن نشان داده می‌شود.

الف) در قضیه ۱ نشان داده شد که نامتناهی بالفعل در دستگاه ریاضیات متناهی، برهان‌پذیر نیست. از طرف دیگر نیز روشن است که هیچ‌یک از براهین ریاضیاتی اقامه شده بر امتناع نامتناهی بالفعل (مانند براهین سه‌گانه مذکور یا براهینی مانند تطبیق، طرف و وسط و غیره و یا براهینی از این دست که در آینده اقامه شوند)، تام و منتج نیستند؛ مگر اینکه به‌طور پیشین پذیرفته باشیم که تمایزی بین احکام ریاضیاتی متناهی و نامتناهی وجود ندارد و قبول کرده باشیم که تسری احکام متناهی به نامتناهی مانعی ندارد، درحالی‌که گزاره "تمایزی بین احکام ریاضیاتی متناهی و نامتناهی وجود ندارد" و همچنین گزاره "تسری احکام ریاضیاتی متناهی به نامتناهی مانعی ندارد"، نه بدیهی هستند و نه اثبات‌پذیر.

به‌عبارت دیگر، بدهت گزاره "برخی از احکام ریاضیاتی که طبق تعریف نامتناهی می‌دانیم بر «نامتناهی» صادق نیست، می‌بایست بر هر مجموعه‌ای (از جمله مجموعه نامتناهی) صادق باشد" که مصادیق آن در براهین ریاضیاتی به‌کار گرفته می‌شوند، در رتبه بدهت امتناع نامتناهی بالفعل است. درحالی‌که فرض بر این است که امتناع نامتناهی بالفعل، امری بدیهی نیست و در نتیجه گزاره

مذکور نیز بدیهی نبوده و مصادیق آن نباید در روند برهان به کار گرفته شوند. بنابراین براهین ریاضیاتی ابطال نامتناهی بالفعل، برهان به معنای منطقی آن نیستند.

ب) با استفاده از قضیه ۱ و به طریق مشابه قسمت (الف)، به راحتی می توان اثبات ناپذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل را نیز نشان داد.

### نتیجه

عده ای مفهوم نامتناهی را امری وهمی، ذهنی، غیر واقعی و ناشی از توهم عقل دانسته و معتقدند که می بایست آن را به کلی کنار گذاشت. اما سؤالات مطرح شده در باب نامتناهی، به قدری شفاف و روشن است که انسان نمی تواند خود را راضی کند تا احساس تشنگی واقعی خود در یافتن پاسخ را امری کاذب بیندارد. هر سؤال شفاف و روشنی نیازمند پاسخی شفاف و روشن است. به علاوه، این نکته درباره مفهوم «بی نهایت»، «تسلسل» و مانند آنها قابل توجه است که این قبیل مفاهیم، تعریف به حد و رسم ندارند و تعریف آنها مفهومی و تئیهی است نه ماهوی و تعلیلی (جوادی آملی، ۱۳۸۶، ج ۲ بخش سوم، ص ۹).

مفاهیمی که افراد آنها از طریق یکی از حواس تصور و ادراک می شوند، اغلب مفاهیم فلسفی نیستند. بیشتر مفاهیم فلسفی را با آنکه ذهن می فهمد، هرگز مستقیماً حس نمی شوند؛ مانند مفهوم وجود، عدم، ضرورت، امکان، امتناع، علیت. ادراک حسی ممکن است ذهن انسان را برای شناخت این مفاهیم به صورت علت اعدادی آماده نماید، ولیکن درک هیچیک از این مفاهیم به طور مستقیم و یا از طریق ترکیب و تجزیه و یا تجرید داده های حسی به دست نمی آید. به همین دلیل، حس گرایانی نظیر هیوم که حواس آدمی را منشأ همه ادراکات او می دانند، از تبیین چگونگی ادراک و فهم این دسته از مفاهیم عاجز هستند (پارسانیا، ۱۳۸۳، ص ۲۳). پس شیوه معرفت فلسفی، حسی و تجربی نیست و ادراک بیشتر تصورات و تصدیقات فلسفی مربوط به منبع دیگری است که از آن با نام عقل یاد می کنند. معرفت عقلی به این معنا با اینکه حسی و تجربی نیست، با تصور و تصدیق و یا قضیه و مفاهیمی که در آن مأخوذ است همراه است. و به همین دلیل، این نوع از معرفت عقلی نظیر معرفت حسی، معرفتی مفهومی و به تعبیر دیگر، معرفتی حصولی است (همان، ص ۲۴). بنابراین اگر چه ذهن ما قادر به تخیل «نامتناهی» نیست، اما قادر به تعقل آن تحت عنوان کلی می باشد (مطهری، ۱۳۶۹، ج ۲، ص ۳۰۲). مانعی نیست که ذهن، غیر متناهی را تعقل کند. یعنی با ترکیب یک سری مفاهیم کلی، تصویری که البته از نوع ماهیات نخواهد بود بلکه از مفاهیم انتزاعی است، برای خود بسازد. ذهن همیشه برای درک و تصور حقایقی که از درک مستقیم آنها ناتوان است، به وسایل روی می آورد. یعنی از طریق غیر مستقیم، تصور معقول و صحیحی به دست می آورد (مطهری، ۱۳۷۸، ج ۵، ص ۱۰۵).



بعد از اینکه روشن شد تعقل مفهوم نامتناهی بالفعل برای عقل ممکن است، سؤالات مهم بعدی مربوط به حوزه تصدیق است که مسائلی همچون تنهایی یا عدم تنهایی ابعاد عالم، امکان وجود جزء لایتجزی، امکان نامتناهی بودن تعداد موجودات، تنهایی یا عدم تنهایی زمان و حوادث گذشته و تسلسل در سلسله علل و معالیل را شامل می‌شود و از دیرباز مورد توجه و اختلاف اندیشمندان بوده است. برخی وجود نامتناهی بالفعل شیء در عالم را ضروری می‌دانند. متکلمین قائل به امتناع نامتناهی بالفعل بوده‌اند، اما اکثر فلاسفه شروطی برای امتناع آن ذکر کرده‌اند. عده‌ای نیز ادله طرفین در اثبات امکان یا امتناع نامتناهی بالفعل را ناتمام دانسته و در مسأله توقف کرده‌اند. عده‌ای هم صورت منطقی ادله طرفین را صحیح دانسته و تناقض حاصل را ناشی از مفهوم نامتناهی بالفعل دانسته‌اند. سرمایه‌ای که در طول تاریخ و در نتیجه ممارست و کوشش دانشمندان بزرگ و بسیاری از متفکرین گردآوری شده بود، کانتور را به این نتیجه رساند که نامتناهی بالفعل، در حوزه ریاضیات قابل اثبات یا ابطال منطقی نیست. با قبول برهان‌پذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل و استقلال آن از ریاضیات متناهی، سرانجام در نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، اصل موضوع نامتناهی به‌عنوان یکی از اصول موضوعه پذیرفته شد.

در قسمت ۲، ابتدا نشان داده شد که نامتناهی بالفعل، مستقل از ریاضیات متناهی است (قضیه ۱) و سپس در قضیه ۲، برهانی بر برهان‌پذیری ریاضیاتی نامتناهی بالفعل ارائه شد. روشن شد که هیچ‌یک از براهین ریاضیاتی ابطال نامتناهی بالفعل (مانند براهین تطبیق، طرف و وسط، سلمی و غیره و یا براهینی از این دست که در آینده اقامه شوند) تام و منتج نیستند، مگر اینکه به‌طور پیشین پذیرفته باشیم که تمایزی بین احکام ریاضیاتی متناهی و نامتناهی وجود ندارد و قبول کرده باشیم که تسری احکام ریاضیاتی متناهی به نامتناهی مانعی ندارد، درحالی‌که گزاره "تمایزی بین احکام ریاضیاتی متناهی و نامتناهی وجود ندارد" و همچنین گزاره "تسری احکام ریاضیاتی متناهی به نامتناهی مانعی ندارد"، نه بدیهی هستند و نه اثبات‌پذیر.

به‌عبارت دیگر، بدهات گزاره‌های به‌کار رفته در براهین ریاضیاتی، از رتبه بدهات امتناع نامتناهی بالفعل است. درحالی‌که فرض بر این است که امتناع نامتناهی بالفعل امری بدیهی نیست و در نتیجه، گزاره‌های به‌کار رفته در براهین ریاضیاتی نیز بدیهی نبوده و نباید در روند برهان به‌کار گرفته شوند. بنابراین براهین ریاضیاتی ابطال نامتناهی بالفعل، برهان به معنای منطقی آن نیستند. بلکه تنها جنبه تبیهی دارند و در صدد روشن کردن هرچه بیشتر لوازم پذیرش مفهوم نامتناهی بالفعل هستند تا در سایه آن بتوان به قابلیت تصدیق امکان یا امتناع نامتناهی بالفعل دست یافت.

کتاب‌نامه

۱. ابن سینا، حسین بن عبدالله (۱۴۰۴ق). الشفاء، «الطبیعیات» (ج ۱). تحقیق: سعید زاید. قم: مکتبه آیه الله المرعشی.
۲. \_\_\_\_\_ (۱۳۷۹). النجاة. با مقدمه و تصحیح محمدتقی دانش‌پژوه. تهران: دانشگاه تهران.
۳. ارسطو (۱۳۶۳). طبیعیات ارسطو. ترجمه: مهدی فرشاد. تهران: امیرکبیر.
۴. \_\_\_\_\_ (۱۳۷۸). سماع طبیعی. ترجمه: محمدحسن لطفی. تهران: طرح نو.
۵. پارسانیا، حمید (۱۳۸۳). علم و فلسفه. چاپ سوم. تهران: پژوهشگاه فرهنگ و اندیشه اسلامی.
۶. جوادی آملی، عبدالله (۱۳۸۶). رهیق مختوم (ج ۲، بخش ۳). چاپ سوم. قم: انتشارات اسراء.
۷. \_\_\_\_\_ (۱۳۹۵). رهیق مختوم (ج ۱۶). قم: انتشارات اسراء.
۸. حسن‌زاده آملی، حسن (۱۳۶۵). هزار و یک نکته. چاپ پنجم. تهران: مرکز نشر فرهنگی رجاء.
۹. خادم‌زاده، وحید و سعیدی‌مهر، محمد (۱۳۸۸). «بررسی برهان‌های ریاضیاتی ابطال تسلسل براساس نظریه مجموعه‌ها». فلسفه و کلام اسلامی، ۴۲ (۱)، ص ۴۵-۶۸.
۱۰. سبزواری، ملاهادی (۱۳۷۹). شرح المنظوم (ج ۴)، با تصحیح و تعلیق آیت‌الله حسن‌زاده آملی و تحقیق و تقدیم مسعود طالبی. تهران: نشر ناب.
۱۱. زارع، روزبه و حسینی، سید حسن (۱۳۹۴). «مسأله آغاز: طرح و بررسی دیدگاه صدرالمتألهین و علامه طباطبایی در باب حدوث زمانی عالم طبیعت». پژوهش‌های هستی‌شناختی، ۴ (۷)، ص ۳۸-۱۲۳.
۱۲. صدرالدین شیرازی، محمدبن ابراهیم (۱۴۱۰ق). الحکمة المتعالیة فی الاسفار العقلیة الاربعة (ج ۲). بیروت: دار احیاء التراث العربی.
۱۳. طالب‌زاده، سید حمید (۱۳۸۵). «متناهی و نامتناهی». فلسفه، دانشگاه تهران، ۳۴ (۱)، ص ۸۷-۱۰۲.
۱۴. طباطبایی، سید محمدحسین (۱۴۲۴ق). «نهایة الحکمة». به تحقیق عباسعلی زارعی سبزواری. قم: مؤسسه نشر اسلامی.
۱۵. قطب‌الدین شیرازی، محمدبن مسعود (۱۳۸۳). شرح حکمة الاشراق. به اهتمام عبدالله نورانی و مهدی محقق. تهران: انجمن آثار و مفاخر فرهنگی.
۱۶. کانت، ایمانوئل (۱۳۶۲). سنجش خرد ناب. ترجمه میر شمس‌الدین ادیب سلطانی. تهران: امیرکبیر.
۱۷. \_\_\_\_\_ (۱۳۶۷). تمهیدات. ترجمه حداد عادل. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
۱۸. کهنسال، علی‌رضا (۱۳۸۱). «تأمل در تسلسل». مطالعات اسلامی، ۵۶ (۵)، ص ۸۵-۱۱۴.

۱۹. مصباح یزدی، محمدتقی (۱۳۹۳). تعلیقه علی نهاییه الحکمة. قم: مؤسسه آموزشی و پژوهشی امام خمینی علیه السلام.
۲۰. مطهری، مرتضی (۱۳۷۸). اصول فلسفه و روش رئالیسم (ج ۵). چاپ سوم. قم: نشر صدرا.
۲۱. \_\_\_\_\_ (۱۳۶۹). حرکت و زمان در فلسفه اسلامی (ج ۲). چاپ سوم. تهران: انتشارات حکمت.
۲۲. میراحمدی، سید سعید (۱۳۹۶). امکان بحث و اقامه برهان در باب «نامتناهی». پایان نامه سطح ۳، حوزه علمیه قم.
23. Abian, A.; LaMacchia, S. (1978). "On the consistency and independence of some set-theoretical axioms". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 19 (1), P. 155-8.
24. Cantor G., Zermelo E. (Ed.) (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer. Berlin. reprinted by Olms, Hildesheim (1966).
25. Craig, E. (1998). *Routledge Encyclopedia of philosophy* (vol. 4). London: Routledge.
26. Craig, W. L. (1979). *The Kalam Cosmological Argument*. London: The McMillan Press.
27. Craig, W. L.; Smith Q. (1995). *Theism, Atheism, and Big Bang Cosmology*. (Clarendon Paperbacks). USA: Oxford University Press.
28. Dauben, J. W. (1979). *George Cantor his mathematics and philosophy of the infinite*. reprint 1990. USA: Princeton University Press.
29. Ewald, W. (1996). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundation of mathematics* (vol. 2). reprinted 2005. New York: Oxford University Press. (H. Poincaré, 1906b, Mathematics and logic: III).
30. Forster, T. (2003). *Logic, induction and sets* (No. 56). Cambridge University Press.
31. Hrbacek, K.; Jech, T. (1999). *Introduction to set theory*. 3rd edition. New York: Marcel Dekker, Inc.
32. Kline, M. (1982). *Mathematics: The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press.
33. Mendelson, E. (1956). "Some Proofs of Independence in Axiomatic Set Theory". *The Journal of Symbolic Logic*, 21(3), P. 291-303.
34. Russ, S. (2004). *The mathematical works of Bernard Bolzano*. reprinted 2006. New York: Oxford University Press.
35. Stillwell, J. (2010). *Roads to infinity: the mathematics of truth and proof*. CRC Press.
36. Van Heijenoort, J (1967). *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic 1879-1931*. USA: Harvard University Press.
37. Wittgenstein, L. (1989). *Lectures on the Foundations of Mathematics*. Diamond, C. (Ed.). Chicago: Chicago University Press.
38. \_\_\_\_\_ (1978). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Oxford: Blackwell.
39. Zhuang, C., "Wittgenstein's analysis on Cantor's diagonal argument". PhilArchive copy v1: <https://philarchive.org/archive/ZHUWAO>.